1. PROGRAMAREA LINIARĂ

O problemă de programare liniară cere să se determine punctul de extrem al unei funcții reale numită funcție obiectiv (sau, sub alte denumiri funcție scop, funcție criteriu) reprezentată printr-o expresie liniară, atunci când variabilele aceste funcții trebuie să respecte o mulțime de restricții reprezentate de un număr de egalități sau inegalități care sunt, la rândul lor, liniare. În raport de cerințele problemei care trebuie rezolvată se discută de probleme de maximizare, dacă se cere determinarea valorii maxime a funcției obiectiv, sau de probleme de minimizare atunci când se cere găsirea valorii minime a acestei funcții.

1.1 Forme de scriere a problemelor de programare liniară

Există mai multe forme echivalente sub care poate fi transcrisă matematic problemă de programare liniară. Cea mai folosită reprezentare a problemelor de programare liniară este forma standard:

$$\max(\min)F(x) = \max(\min)\left(c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n\right) \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_i \geq 0 \qquad i = \overline{1,n} \tag{1.3}$$

După cum se poate observa, o problemă de programare liniară se compune din funcția obiectiv (1.1), restricțiile (1.2) şi condițiile de nenegativitate impuse variabilelor (1.3). Pentru a defini complet o problemă de programare liniară trebuie precizați coeficienții funcției obiectiv c_i, coeficienții restricțiilor a_{ij} şi termenii liberi ai restricțiilor b_j.

Determinarea soluției optime a problemei de programare liniară prin aplicarea condițiilor de extrem ale funcțiilor reale (derivatele parțiale de ordinul întâi să fie nule) nu este posibilă deoarece, datorită formei particulare a funcției obiectiv, derivate parțiale sunt constante şi deci nu se pot anula (gradientul funcției obiectiv este constant pe R^n).

Pe lângă forma standard, o problemă de programare liniară poate fi formulată sau poate fi transpusă şi sub alte forme. Trebuie subliniat că diferitele forme ale problemei sunt echivalente, în sensul că au aceeaşi soluție (valoarea maximă sau minimă a funcției obiectiv este aceeaşi şi ea este atinsă în acelaşi punct).

Forma canonică este reprezentată de relațiile următoare:

$$\max(\min)F(x) = \sum_{i=1}^{n_1} c_i x_i \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=1}^{n_1} a_{ji} x_i \le b_j \qquad j = \overline{1,m} \tag{1.5}$$

$$x_i \ge 0 \qquad i = \overline{1,n_1} \tag{1.6}$$

Trecerea de la forma canonică la forma standard se face prin adăugarea câte unei variabile suplimentare (numită variabilă ecart sau variabilă de egalizare) pentru fiecare inecuație a sistemului de restricții, variabilă care are rolul de a transforma inegalitatea în egalitate. Pentru a păstra valoarea funcției obiectiv, aceste variabile suplimentare vor fi introduse în funcția obiectiv cu coeficienți c_i nuli. Valorile variabilelor ecart nu sunt importante în rezolvarea problemei, ele arătând, de exemplu, cantitățile de resurse rămase nefolosite.

Fiecare dintre formele standard sau canonică pot fi transcrise şi sub formă matriceală sau vectorială.

Transcrierea matriceală a unei probleme de programare liniară sub formă standard este următoarea:

$$\max(\min)F(x) = c^T x \tag{1.7}$$

$$Ax = b \tag{1.8}$$

$$x \ge 0 \tag{1.9}$$

unde $x \in R^n$ - vectorul variabilelor;

$A = [a_{ij}]$ - matricea coeficienților sistemului (cu m linii şi n coloane);

$b \in R^m$ - vectorul termenilor liberi ai restricțiilor;

$c \in R^n$ - vectorul constant al coeficienților funcției obiectiv.

Forma vectorială este reprezentată de relațiile:

$$\max(\min) F(x) = c^T x \tag{1.10}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b \tag{1.11}$$

$$x \geq 0 \tag{1.12}$$

unde $a_1, \dots, a_n$ sunt vectorii coloană ai matricei A.

Considerând o problemă de programare liniară sub forma standard, transcrisă sub formă matriceală, notând cu $(A|b)$ matricea $m \times n+1$ obținută adăugând la dreapta lui A coloana termenilor liberi b, condițiile necesare pentru ca această să aibă soluție sunt următoarele:

$$\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A|b) \tag{1.13}$$

$$\operatorname{rang}(A) < n \tag{1.14}$$

care arată că sistemul de restricții trebuie să fie compatibil şi nedeterminat, ceea ce înseamnă că există o infinitate de soluții care respectă restricțiile.

Dacă (1.13) nu este îndeplinită sistemul restricțiilor este incompatibil, ceea ce înseamnă că nici problema de optimizare nu poate avea soluții, iar dacă (1.13) este verificată dar $\operatorname{rang}(A) = n$ acesta are o soluție unică (deci nu se mai pune problema de a alege acea soluție pentru care funcția obiectiv are valoarea cea mai bună).

În condițiile anterioare, se va admite în continuare că $\operatorname{rang}(A) = m$ (numărul de ecuații ale sistemului de restricții). Această ipoteză nu reprezintă o restrângere a generalității problemei date: dacă (1.13) şi (1.14) sunt verificate dar $\operatorname{rang}(A) < m$ se poate obține o problemă echivalentă cu cea inițială eliminând din sistemul de ecuații liniare pe cele secundare (ecuațiile ai căror coeficienți nu apar în determinantul nenul care dă rangul matricei A).

Aceste restricții secundare vor fi îndeplinite în mod automat de orice soluție a problemei, obținută prin rezolvarea sistemului de restricții simplificat, ceea ce garantează echivalența celor două probleme.

1.2 Soluții ale problemelor de programare liniară

Luând în considerare sistemul de restricții şi condițiile de nenegativitate ale unei probleme de programare liniară dată se pot defini mai multe tipuri de soluții care vor fi utilizate pentru fundamentarea metodelor de rezolvare a problemei.

Se numeşte *soluție admisibilă* (realizabilă, fezabilă) a problemei de programare liniară dată un vector din R^n ale cărui componente verifică simultan restricțiile (1.2) şi condițiile de nenegativitate (1.3).

Se numeşte *soluție de bază* o soluție admisibilă care are cel mult m componente strict pozitive (unde m este numărul de ecuații din sistemul de restricții). Deoarece o soluție admisibilă trebuie să verifice condițiile de nenegativitate celelalte componente ale soluției de bază sunt, bineînțeles, nule.

O soluție de bază care are exact m componente strict pozitive se numeşte *nedegenerată.* Dacă soluția de bază are mai puțin de m componente strict pozitive se numeşte *degenerată.*

Se numeşte *soluție optimă* acea soluție admisibilă căreia îi corespunde o valoarea maximă (pentru problemele de maximizare) sau minimă (pentru problemele de minimizare) a funcției obiectiv pe mulțimea soluțiilor admisibile. O problemă de programare liniară poate avea o soluție optimă sau o infinitate de soluții optime. Se poate demonstra că orice punct care aparține segmentului determinat de două soluții optime este, la rândul său, soluție optimă

Deci, a rezolva o problemă de programare liniară înseamnă a găsi răspunsul la întrebarea: pentru care dintre vectorii din R^n ale căror componente verifică simultan condițiile (1.2) şi (1.3) funcția obiectiv are valoarea cea mai mare (sau cea mai mică)?

În funcție de specificul problemei care trebuie rezolvată, diferiții coeficienți au semnificații diferite. Astfel, coeficienții funcției obiectiv c_i reprezintă beneficii unitare, prețuri unitare, cheltuieli de producție unitare. Coeficienții sistemului de restricții a_{ij} (denumiți coeficienți tehnici) reprezintă consumuri specifice, capacități de încărcare a utilajelor etc. Termenii liberi b_i reprezintă, în general, cantități de resurse disponibile sau limite tehnologice.

1.3 Metoda simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară

Metoda simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară a fost elaborată de G.B. Dantzig şi are la bază câteva definiții şi teoreme importante, prezentate în continuare.

Se numeşte *punct extremal* al unui domeniu convex U al unui spațiu vectorial un punct u care are proprietatea că, oricare ar fi alte două puncte v şi w din U şi parametrul real $\lambda \in (0,1)$, este adevărată implicația:

$$u = \lambda v + (1-\lambda) w \quad \Rightarrow \quad u = v = w \tag{1.15}$$

Deci, un punct extremal al unei mulțimi este acel punct care nu poate fi scris ca o combinație liniară convexă a altor două puncte din mulțime, ceea ce este echivalent cu a spune că nu există un segment inclus în mulțime (ale cărui capete fac parte din mulțimea respectivă) căruia să-i aparțină acest punct.

Se numeşte *poliedru convex* în R^n o mulțime de forma:

$$U = \left\{ x \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \le d_i \;\; i = \overline{1,p} \;\;\; \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = d_k \;\; k = \overline{p+1,m} \right. \right\} \tag{1.16}$$

Deci, un poliedru convex este o mulțime convexă care are un număr finit de puncte extremale.

Se numeşte *vârf* al unui poliedru un punct extremal al acestuia.

Tr. Dacă un poliedru este nevid, atunci el are cel puțin un vârf. În plus, numărul vârfurilor este finit.

Se numeşte *simplex* un poliedru convex din R^n care are (m+1) puncte extremale.

În continuare se va considera o problemă de programare liniară sub formă standard, reprezentată de relațiile (1.1), (1.2) şi (1.3).

După cum se poate observa, mulțimea soluțiilor admisibile ale acestei probleme este un poliedru în R^n.

Tr. Condiția necesară şi suficientă ca un punct x diferit de origine al poliedrului:

$$U = \left\{ x \in R_+^n \middle| \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j = d_i \quad i = \overline{1,m} \right\} \tag{1.17}$$

să fie vârf al acestuia este ca vectorii coloană $C_j \in R^m$ ai coeficienților corespunzători valorilor strict pozitive ale lui x să fie liniar independenți.

Cu alte cuvinte o soluție admisibilă x este vârf al poliedrului care reprezintă domeniul de admisibilitatea dacă şi numai dacă coloanele din matricea A care corespund unor componente nenule ale lui x sunt vectori liniar independenți, deci formează o bază în R^m.

Deoarece A este o matrice cu m linii şi n coloane, rezultă că numărul maxim de coloane liniar independente este m, deci orice punct care constituie un vârf al poliedrului soluțiilor admisibile are cel mult m componente nenule.

În aceste condiții se poate enunța următoarea teoremă:

Tr. Un punct din R^n reprezintă un vârf al poliedrului soluțiilor admisibile dacă şi numai dacă el este soluție de bază pentru problema de optimizare respectivă.

Fiecărei soluții de bază (vârf al poliedrului) i se poate asocia baza formată din coloanele lui A corespunzătoare componentelor nenule ale vectorului care reprezintă soluția de bază. Dacă se cunoaşte baza se obține soluția de bază foarte simplu prin rezolvarea sistemului liniar care rezultă din sistemul de restricții eliminând necunoscutele ale căror coloane nu fac parte din bază.

Trebuie subliniat faptul că baza asociată unei soluții de bază nedegenerate este unică în timp ce baza asociată unei soluții de bază degenerate nu este obligatoriu unică.

Tr. Dacă problema de programare liniară considerată are o soluție, atunci cel puțin un vârf al poliedrului soluțiilor admisibile este de asemenea soluție.

Considerând o problemă de maximizare, principiul metodei simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară este următorul: plecând dintr-un vârf x^0 al poliedrului soluțiilor admisibile se construieşte un şir de vârfuri x^0, x^1, x^2, . . . , x^{k-1}, x^k, . . . cărora le corespund valori crescătoare ale funcţiei obiectiv. Dacă şirul de vârfuri se poate construi astfel încât să se respecte inegalitatea strictă:

$$F\left(x^{k-1}\right) > F\left(x^k\right) \tag{1.18}$$

şi dacă problema are o soluție, ținând cont de faptul că poliedrul soluțiilor admisibile are un număr finit de vârfuri, rezultă că această metodă garantează obținerea soluției optime într-un număr finit de paşi.

Aplicarea metodei simplex presupune:

a. Determinarea unui vârf (soluție de bază) inițial.

b. Odată atins un vârf se analizează modul în care se modifică valorile funcției obiectiv de-a lungul muchiilor poliedrului care se intersectează în acest vârf:

  - dacă valoarea funcției obiectiv nu mai creşte când punctul curent se deplasează de-a lungul nici uneia dintre aceste muchii, vârful atins este soluția optimă;

  - dacă există o muchie de-a lungul căreia funcția obiectiv creşte, atunci următorul punct din şirul de vârfuri este cel în care se ajunge de-a lungul acestei muchii.

Exemplu

Pentru ilustrarea metodei simplex se consideră următoarea problemă de programare liniară bidimensională.

$$\max \quad F\left(x_1, x_2\right) = x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Metoda simplex urmăreşte deplasarea pe frontiera domeniului soluțiilor admisibile, de-a lungul muchiilor simplexului, urmărind proiecția gradientului funcției (care este constant) pe aceste muchii.

În fig.1.1 a fost ilustrată grafic metoda simplex de rezolvare a problemei. Aici se poate vedea domeniul soluțiilor admisibile (poligonul convex OABCD) şi dreptele ce conțin punctele pentru care funcția obiectiv are valoare constantă.

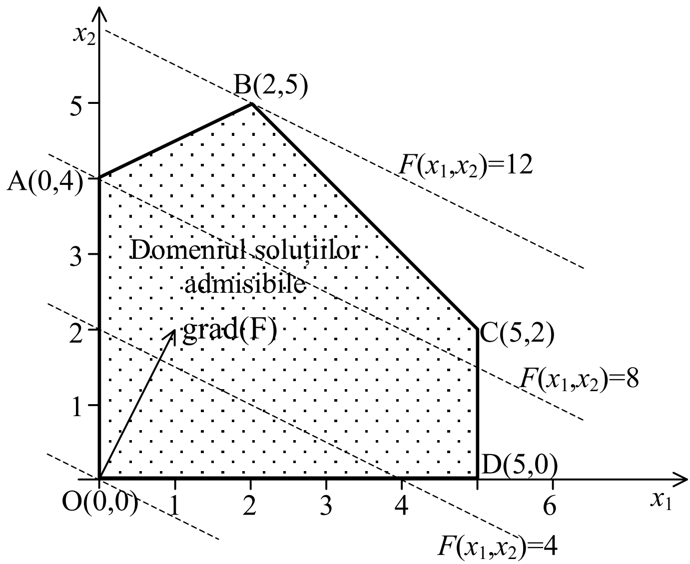

Figura 1.1 *Metoda de rezolvare a problemei bidimensionale*

Dacă se porneşte din origine ca soluție de bază inițială (unde funcția obiectiv are valoare nulă) se obține o creştere a acesteia prin deplasare de-a lungul celor două muchii OA şi OB care se întâlnesc în acest vârf. Deoarece creşterea funcției este mai rapidă de-a lungul muchiei OA (proiecția gradientului funcției pe aceasta este mai mare) următoarea soluție de bază va fi vârful A(0,4) caracterizat prin valoarea $F(0,4)=8$. Din acest punct extremal se va urma latura AB până în vârful B, care reprezintă soluția optimă.

Soluția optimă a problemei va fi $x_1=2$; $x_2=5$ iar valoarea maximă a funcției obiectiv $F(2,5)=12$.

Aplicarea metodei simplex sub formă grafică este imposibilă pentru problemele de mari dimensiuni, cu multe restricții. Din această cauză trebuie obținută o metodă analitică, iterativă, sub forma unui algoritm bine structurat, cu paşi şi condiții de oprire precizate.

Pentru aceasta se consideră că, la un moment dat, s-a obținut o soluție de bază. Fără a restrânge generalitatea se poate considera că această soluție are ca variabile de bază (cele care pot fi strict pozitive) primele m componente, celelalte fiind nule (dacă situația nu este aceasta se poate ajunge aici prin renumerotarea variabilelor problemei). În aceste condiții se fac următoarele notații:

- vectorul variabilelor de bază

$$x^B = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_i & \dots & x_m \end{bmatrix}^T \tag{1.19}$$

- vectorul variabilelor secundare

$$x^R = \begin{bmatrix} x_{m+1} & \dots & x_n \end{bmatrix}^T \tag{1.20}$$

- vectorul coeficienților variabilelor de bază

$$c^B = \begin{bmatrix} c_1 & \dots & c_i & \dots & c_m \end{bmatrix}^T \tag{1.21}$$

- vectorul coeficienților variabilelor secundare

$$c^R = \begin{bmatrix} c_{m+1} & \dots & c_n \end{bmatrix}^T \tag{1.22}$$

- matricea coeficienților restricțiilor corespunzători variabilelor de bază (matrice care constituie o bază în spațiul R^m).

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

- matricea coeficienților restricțiilor corespunzători variabilelor secundare

$$R = \begin{bmatrix} a_{1m+1} & a_{1m+2} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{im+1} & a_{im+2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & \\ a_{mm+1} & a_{mm+2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.24}$$

Cu aceste notații problema de programare liniară poate fi pusă sub forma echivalentă:

$$\begin{aligned} &\max F(x) = \begin{bmatrix} c^B \\ c^R \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} c^B \\ c^R \end{bmatrix} = \left(c^B\right)^T x^B + \left(c^R\right)^T x^R \\ &B \cdot x^B + R \cdot x^R = b \\ &x^B \geq 0 \quad ; \quad x^R \geq 0 \end{aligned} \tag{1.25}$$

Deoarece matricea *B* este nesingulară, din sistemul de restricții, prin înmulțire la stânga cu inversa matricei *B*, se poate obține:

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R \tag{1.26}$$

Această relație permite determinarea unei prime soluții de bază dacă se consideră vă toate variabilele secundare sunt nule, respectiv x^R=0. Pentru aceasta se observă că $\overline{x}^B$ definit ca:

$$\overline{x}^B = B^{-1}b \tag{1.27}$$

este soluție de bază dacă nu are nici o componentă negativă.

Dacă $\overline{x}^B$ astfel determinat are componente negative soluția nu este admisibilă, deci nu poate fi nici soluție de bază. În acest caz se poate considera o altă bază *B* (se alege o altă matrice pătratică nesingulară compusă din *m* coloane ale matricei *A*) până la obținerea unei soluții de bază.

Valoarea funcției obiectiv pentru soluția de bază astfel determinată va fi:

$$F\left(\overline{x}_1^B,\ldots,\overline{x}_m^B,0,\ldots,0\right) \overset{\text{not}}{=} \overline{Z} = \left(c^B\right)^T \overline{x}^B = \left(c^B\right)^T B^{-1}b \tag{1.28}$$

În continuare se va nota cu G matricea cu m linii şi (n-m) coloane:

$$G = B^{-1}R = \begin{bmatrix} g_{1m+1} & g_{1m+2} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & & \\ g_{im+1} & g_{im+2} & \cdots & g_{in} \\ \vdots & & & \\ g_{mm+1} & g_{mm+2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.29}$$

Deoarece G are aceeaşi dimensiune ca şi R s-au folosit aceiaşi indici.

Plecând de la soluția de bază obținută se urmăreşte îmbunătățirea sa iterativă astfel încât să se obțină, la fiecare pas, o creştere a valorii funcției obiectiv. În acest scop se consideră că una dintre variabilele din X^R devine nenulă, deci intră între variabilele de bază. Fie această componentă X_j cu j având o valoare între m+1 şi n.

Valorile componentelor soluției astfel modificate rezultă din:

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R = \overline{x}^B - G\begin{bmatrix}0 & \ldots & 0 & X_j & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}^T \tag{1.30}$$

sau, particularizând pentru o anumită componentă:

$$x_i^B = \overline{x}_i^B - g_{ij}x_j \tag{1.31}$$

După cum se poate observa din această relație, pe măsură ce x_j creşte vor scădea toate componentele lui x^B cărora le corespund valori g_{ij} pozitive. Deoarece soluția care rezultă trebuie să fie tot soluție de bază (să aibă tot cel mult m componente pozitive şi restul nule) creşterea lui x_i va trebui să se oprească atunci când prima dintre componentele lui x^B devine nulă, ceea ce corespunde minimului raportului $\overline{x}_s^B / g_{ij}$:

$$x_j = \min_{k=\overline{1,m}} \left\{ \frac{\overline{x}_k^B}{g_{kj}} \middle| \quad g_{kj} > 0 \right\} \tag{1.32}$$

Valoarea funcției obiectiv pentru noua soluție va fi:

$$\begin{aligned} F(x) &= \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i^B + c_j x_j = \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i \overline{x}_i^B - x_j \left(\sum_{i=1}^{m} c_i g_{ij} - c_j \right) \end{aligned} \tag{1.33}$$

sau, cu notațiile:

$$\begin{aligned} F(x) &\overset{\text{not}}{=} Z \\ Z_j &\overset{\text{not}}{=} \sum_{i=1}^{m} c_i g_{ij} \end{aligned} \tag{1.34}$$

se obține:

$$Z = \overline{Z} - x_j \left(Z_j - c_j \right) \tag{1.35}$$

Deci, pentru ca funcția obiectiv să crească ($Z > \overline{Z}$), deoarece x_j este pozitiv, trebuie ca diferența $Z_j - c_j$ să fie negativă.

Dacă este îndeplinită condiția:

$$Z_j - c_j \geq 0 \quad \forall\, j = \overline{m+1,n} \tag{1.36}$$

valoarea funcției obiectiv nu mai poate creşte prin trecerea unei variabile din x^R în x^B, deci soluția de bază obținută este soluția optimă.

Dacă există o variabilă pentru care $Z_j - c_j < 0$ şi, în plus, $g_{ij} < 0 \quad \forall\, i = \overline{1,n}$ atunci funcția obiectiv nu admite un minim finit.

În acest caz valoarea acestei variabile poate să fie oricât de mare deoarece, odată cu ea, cresc şi celelalte variabile din $x^{\boldsymbol{B}}$ conform (1.31), iar valoarea funcției obiectiv creşte până la infinit conform (1.35).

Rezultă că prin analiza semnului diferențelor $Z_j - c_j$ şi a elementelor lui G se poate stabili:

-dacă soluția de bază curentă este soluție optimă sau nu;

-dacă problema dată nu are soluție optimă.

În cazul în care nu rezultă nici una dintre aceste concluzii, deci soluția curentă poate fi îmbunătățită, rezultând o creştere finită a valorii funcției obiectiv, pentru a obține soluția optimă într-un număr minim de paşi ar trebui introdusă printre variabilele de bază aceea pentru care creşterea funcției obiectiv ar fi maximă:

$$\left|x_k\left(Z_k - c_k\right)\right| = \max_{\underline{j=m+1,n}} \left\{\left|x_j\left(Z_j - c_j\right)\right| \quad \left|Z_j - c_j < 0\right.\right\} \tag{1.37}$$

în care valoarea x_j se poate obține din (1.32).

Deoarece calculele ar fi destul de complicate, necesitând determinarea valorilor variabilelor x_j, se preferă selectarea variabilei x_l pentru care:

$$\left|Z_l - c_l\right| = \max_{\underline{j=m+1,n}} \left\{\left|Z_j - c_j\right| \quad \left|Z_j - c_j < 0\right.\right\} \tag{1.38}$$

Alegerea variabilei care intră în bază nu este critică cât timp se respectă condiția ca $Z_j - c_j$ să fie negativă. O alegere incorectă poate conduce doar la mărirea numărului de paşi după care se rezolvă problema şi se obține soluția optimă.

Variabila care trece în vectorul variabilelor secundare se obține din (1.32) ca fiind prima variabilă x_s care se anulează:

$$\frac{\overline{x}_s^B}{g_{sl}} = \min_{\underline{k=1,m}} \left\{ \frac{\overline{x}_k^B}{g_{kl}} \middle| \, g_{kl} > 0 \right\} \tag{1.39}$$

1.4 Algoritmul simplex primal

Se presupune cunoscută o soluție de bază inițială.
Algoritmul simplex primal este format din următoarele etape:

1. Se determină B şi se calculează matricea $G = B^{-1}R$
2. Se determină diferențele:

$$Z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i g_{ij} - c_j \quad j \in J \overset{\text{not}}{=} \{m+1 \quad m+2 \quad \dots \quad n\} \tag{1.40}$$

şi se analizează semnul acestora;

2.1 Dacă $Z_j - c_j \geq 0 \quad \forall\, j \in J$ soluția de bază este optimă.

2.2 Dacă există diferențe $Z_j - c_j$ negative se notează cu

$$J_1 = \{ j \in J \quad | \quad Z_j - c_j < 0 \} \tag{1.41}$$

mulțimea indicilor diferențelor negative;

2. Se analizează semnul componentelor vectorilor coloană g_j ai lui G pentru indicii j din J_1

3.1 Dacă există cel puțin un vector $g_j \leq 0 \quad j \in J_1$ (care nu are nici o componentă pozitivă) rezultă că problema nu are soluție mărginită;

3.2 Dacă pentru toți indicii $j \in J_1$ vectorii g_j au componente pozitive se determină vectorul a_l care va intra în bază din condiția:

$$|Z_l - c_l| = \max_{j=m+1,n} \{ |Z_j - c_j| \quad | \quad j \in J_1 \} \tag{1.42}$$

şi vectorul a_s care va ieşi din bază din condiția:

$$\frac{\bar{x}_s^B}{g_{sl}} = \min_{k=m+1,n} \left\{ \frac{\bar{x}_k^B}{g_{kl}} \quad \middle| \quad g_{kl} > 0 \right\} \tag{1.43}$$

3. Se formează noua bază prin înlocuirea lui a_s cu a_l, se determină soluția corespunzătoare acestei baze, şi se revine la punctul 1.

Soluția inițială va fi îmbunătățită iterativ, până la obținerea soluției optime sau până se stabileşte că problema nu are un maxim finit.

Pentru aplicarea algoritmului se completează un tabel numit tabel simplex şi care are forma următoare.

Tab. 1.1 *Tabelul simplex*

		c_1	c_2	c_m	c_{m+1}	c_k	c_n	
c	Baza	a_1	a_2	a_m	a_{m+1}	a_k	a_n	b
c_1	a_1	1	0	0	g_{1m+1}	g_{1k}	g_{1n}	$\widetilde{b}_1$
c_2	a_2	0	1	0	g_{2m+1}	g_{2k}	g_{2n}	$\widetilde{b}_2$
c_m	a_m	0	0	1	g_{mm+1}	g_{mk}	g_{mn}	$\widetilde{b}_m$
Z_j		Z_1	Z_2	Z_m	Z_{m+1}	Z_k	Z_n	Z
Z_j-c_j		0	0	0	Z_{m+1}-c_{m+1}	Z_k-c_k	Z_n-c_n	

Valoarea Z_j se obţine ca produs scalar între vectorul c şi coloana a_i din tabelul simplex. Pentru variabilele de bază se va obţine $Z_i = c_i$ (coloana fiind un versor al bazei), deci $Z_i - c_i = 0$. Valoarea Z a funcţiei obiectiv este egală cu produsul scalar dintre c şi b.

Pentru trecerea la următorul tabel simplex se aplică metoda pivotajului, pivotul fiind elementul aflat la intersecţia liniei vectorul care iese din bază cu coloana vectorul care intră în bază. Pentru aplicarea acestei metode se procedează astfel:

-linia pivotului se împarte la acesta;

-cu excepţia pivotului, coloana acestuia se completează cu 0;

-considerând că pivotul este a_{ij}, orice element care nu se găseşte nici pe linia şi nici pe coloana pivotului se determină ca:

$$\begin{aligned} \widetilde{a}_{kl} &= a_{kl} - \frac{a_{il}a_{kj}}{a_{ij}} \\ \widetilde{b}_k &= b_k - \frac{b_i a_{kj}}{a_{ij}} \end{aligned} \tag{1.44}$$

$\widetilde{a}, \widetilde{b}$ fiind valorile din tabloul modificat, iar a, b cele din tabloul iniţial.

1.5 Dualitatea în programarea liniară

Se consideră două probleme de programare liniară:

$$\begin{aligned} &\max \quad F(x) = c^T x \\ &A \cdot x \le b \\ &x \ge 0 \end{aligned} \tag{1.45}$$

şi:

$$\begin{aligned} &\min \quad U(y) = b^T y \\ &A^T \cdot y \ge c \\ &y \ge 0 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Problema de programare liniară (1.46) reprezintă duala problemei (1.45). Se observă că, între problemele iniţială şi duală există următoarele legături şi deosebiri:

-se schimbă tipul problemei: dacă problema iniţială cere maximizarea funcţiei obiectiv, duala impune minimizarea şi invers;

-vectorul coeficienţilor funcţiei obiectiv şi vectorul termenilor liberi ai sistemului de restricţii se schimbă între ei;

-matricea sistemului de restricţii în duală este reprezentată de transpusa matricei sistemului de restricţii al problemei iniţiale;

-se modifică semnul restricţiilor, ceea ce înseamnă, pentru a transforma inecuaţiile în ecuaţii, variabilele ecart se adună la primul termen în problema de maxim şi se scad la problema de minim.

Tr. Dacă problema iniţială (1.44) are soluţie optimă atunci şi duala sa are soluţie optimă şi reciproc. În plus:

$$\max F(x) = \min U(y) \tag{1.47}$$

Trebuie subliniat faptul că perechea de probleme primal-duală nu trebuie rezolvată separat: în ultimul tabel simplex corespunzător uneia dintre probleme se găseşte şi soluţia celeilalte probleme. Astfel, soluţia problemei duale este reprezentată de valorile găsite pe linia lui Z_j în coloanele corespunzătoare vectorilor care au format baza în primul tabel simplex.

1.6 Reoptimalizarea problemelor de programare liniară

În practică se întâmplă uneori ca, după rezolvarea unei probleme de programare liniară şi găsirea soluţiei optime, să se producă anumite modificări în structura acestei probleme, modificări reflectate în schimbarea anumitor parametri ai acesteia.

Determinarea noii soluţii optime este posibilă, bineînţeles, prin rezolvarea noii probleme obţinute, dar cu un efort de calcul considerabil (în special în cazul problemelor de mari dimensiuni). În acest caz se poate încerca reoptimalizarea, pornind de la problema iniţială şi de la soluţia sa optimă.

Cele mai frecvente modificări constau în variaţii ale vectorului resurselor b, modificarea coeficienţilor funcţiei obiectiv C, modificarea coeficienţilor sistemului de restricţii a_{ij}, apariţia unor restricţii suplimentare, apariţia unor variabile suplimentare. Astfel, se pot produce modificări la nivelul stocurilor de resurse disponibile, variaţii ale parametrilor acestor resurse, ceea ce conduce la modificarea consumurilor specifice, schimbări în parametrii tehnologici ai instalaţiilor ca urmare a unor defectări sau finalizării unor lucrări de retehnologizare, intrarea în funcţionare a unor agregate suplimentare, apariţia unor restricţii datorate unor factori de mediu ambiant.

Metodele de reoptimalizare pentru fiecare caz sunt fundamentate pornind de la expresiile soluţiei de bază (1.27) şi condiţiilor de optim (1.36) şi analizând modul în care sunt influenţate acestea de schimbările produse în problemă.

Prin aplicarea diferitelor tehnici de reoptimalizare se pot obţine reduceri ale efortului de calcul sau a timpului de calcul (aspect extrem de important în conducerea proceselor în timp real, unde timpul în care este disponibilă soluţia este critic).

Trebuie subliniat faptul că eficienţa acestor metode depinde atât de tipul modificărilor produse cât şi de amplitudinea (valoarea) acestor modificări.

În sistemele reale pot apărea situaţii în care se produc mai multe modificări simultan. În acest caz se pot analiza succesiv fiecare schimbare apărută, soluţia finală fiind obţinută ca rezultat al ultimei analize efectuate.

1.6.1. Modificarea coeficienților funcției obiectiv *c*

În acest caz, deoarece vectorul termenilor liberi ai restricțiilor *b* şi matricea *A* au rămas neschimbate (deci şi *B*, *R* şi *G*), soluția optimă a problemei inițiale, dată de (1.27) rămâne soluție de bază pentru problema modificată (deoarece are toate componentele pozitive). Întrebarea este dacă această soluție de bază mai este soluție optimă pentru problema modificată. Deoarece coeficienții funcției obiectiv s-au modificat de la c la $\widetilde{c}$, condițiile de optim (1.36) pot fi scrise vectorial, luând în considerare relațiile (1.34) şi (1.29):

$$\widetilde{Z}_j - \widetilde{c}_j = \left(\widetilde{c}^{\,B}\right)^T B^{-1} a_j - \widetilde{c}_j \geq 0 \tag{1.48}$$

Putem avea două situații:

a. Condițiile (1.48) sunt verificate. În acest caz soluția optimă a problemei inițiale rămâne soluție optimă şi pentru problema modificată. Rezolvare problemei modificate se face prin modificarea coeficienților c_i în ultimul tabel simplex, recalcularea valorilor Z_j şi a diferențelor Z_j-c_j, deci cu un efort de calcul minim.

Trebuie subliniat faptul că, prin modificarea coeficienților funcției obiectiv, se modifică valoarea optimă a acesteia chiar dacă soluția optimă (punctul în care valoarea optimă este atinsă) rămâne aceeaşi. Valoarea optimă a funcției obiectiv pentru problema modificată va fi dată de (1.28) cu modificările coeficienților c_i:

$$\widetilde{Z} = \left(\widetilde{c}^{\,B}\right)^T B^{-1} b \tag{1.49}$$

b. Există diferențe $\widetilde{Z}_j - \widetilde{c}_j$ negative. În acest caz soluția optimă a problemei inițiale este soluție de bază a problemei modificate dar nu este soluție optimă. Pentru rezolvarea problemei se continuă de la ultimul tabel simplex al problemei modificate. În general, pentru modificări mici aduse problemei date rezultă modificări mici ale soluției problemei. Soluția finală va fi obținută într-un număr mai mic de paşi decât dacă s-ar porni de la o soluție de bază inițială arbitrară. În plus, nu mai este necesară determinarea soluției de bază inițiale.

1.6.2. Modificarea vectorului *b*

Soluția optimă a problemei inițiale, care este şi soluție de bază, este dată de (1.27). Prin modificarea lui b în $\widetilde{b}$, se vor modifica şi componentele acestei soluții:

$$\widetilde{x}^B = B^{-1}\widetilde{b} \tag{1.50}$$

Putem avea două situații:

a. Toate componentele lui $B^{-1}\widetilde{b}$ sunt pozitive, deci soluția transformată este tot o soluție de bază. Întrebarea care se pune este dacă reprezintă şi soluție optimală pentru problema modificată. Din (1.48) se observă că în condițiile de optimalitate nu apar componentele vectorului *b*. În consecință, soluția optimă a problemei inițiale reprezintă soluție optimă şi pentru problema modificată.

b. Soluția modificată are componente negative, deci nu mai este soluție de bază. Deoarece în duală vectorii *c* şi *b* îsi schimbă rolul, iar *c* a rămas nemodificat, soluția optimă a problemei duale a rămas soluție de bază, dar nu mai este soluție optimă. Procesul de optimizare se poate continua pentru duală începând cu această soluție ca soluție de bază inițială. Odată cu obținerea soluției optime a problemei duale se obține şi soluția optimă a problemei modificate.

1.6.3. Introducerea unei noi variabile

În cazul introducerii de noi variabile în problemă, datorită faptului că numărul de restricții rămâne acelaşi, această variabilă suplimentară poate fi considerată o variabilă secundară. În funcție de valoarea diferenței:

$$Z_{n+1} - c_{n+1} = \left(c^B\right)^T B^{-1} a_{n+1} - c_{n+1} \tag{1.51}$$

se poate trage concluzia că soluția optimă a problemei inițiale rămâne soluție optimă şi pentru problema modificată atunci când valoarea dată de (1.51) este pozitivă (cu valoare nulă pentru variabila suplimentară) sau procesul de optimizare trebuie continuat de la ultimul tabel simplex In cazul în care diferența (1.51) este negativă.

1.6.4. Modificarea unui coeficient din matricea restricțiilor

Dacă se presupune că se modifică valoarea coeficientului a_{ij} din sistemul de restricții al probelmei, influența acestei modificări asupra procesului de optimizare este diferită după cum acesta aparține matricei B sau matricei R.

a. În cazul în care se modifică valoarea coeficientului a_{ij} al unei variabile secundare soluția optimă deja obținută pentru problema inițială rămâne soluție de bază pentru cea modificată deoarece B şi b în (1.27) nu sunt afectate. În schimb, coeficienții Z_j vor fi diferiți, conform relațiilor (1.24), (1.29) şi (1.34), şi deci şi diferențele $Z_j - c_j$. În funcție de semnul acestorase poate trage concluzia că soluția deja obținută rămâne soluție optimă (atunci când toate diferențele sunt pozitive) sau că optimizarea trebuie să fie reluată, începând cu ultimul tabel simplex (dacă cel puțin o diferență este negativă).

b. În cazul în care modificarea afectează un coeficient al unei variabile din bază, analiza este mai dificilă deoarece schimbările sunt mai importante: se modifică B (şi deci B^{-1}), $\overline{x}^B$, G şi Z. Se pot obține situații în care soluția optimă inițială nu mai este soluție de bază (dacă $\overline{x}^B = B^{-1}b$ are componente negative), este soluție de bază dar nu este optimă (există diferențe $Z_j - c_j$ negative) sau rămâne soluție optimă. În fiecare situație se procedează în mod corespunzător.

1.6.5. Introducerea unei noi restricții

În cazul adăugării unei noi restricții la sistemul deja existent numărul variabilelor de bază se măreşte cu o unitate (dacă restricția este independentă fată de cele deja considerate) deoarece numărul variabilelor de bază este egal cu numărul restricțiilor.

În general, dacă soluția optimă determinată pentru problema inițială verifică restricția nou introdusă ea rămâne soluție optimală, valoarea variabilei de bază suplimentare fiind obținută prin înlocuirea variabilelor deja cunoscute în restricția suplimentară.

Dacă soluția cunoscută nu verifică restricția nou introdusă procesul optimizării trebuie reluat.

Aplicație

Să se determine încărcarea optimă a două grupuri ale unei centrale termoelectrice cu puterile nominale de 100 şi 200 MW. Cele două grupuri utilizează cărbunele – combustibil de bază şi păcură – combustibil suport. Consumurile specifice sunt de 0,4 tcc/MWh (din care 5% combustibil suport) pentru primul grup şi 0,3 tcc/MWh (din care 8% combustibil suport) pentru cel de al doilea grup. Cantitățile de combustibil disponibile pentru o zi de funcționare sunt de 2200 tcc echivalent cărbune şi 150 tcc echivalent păcură. Criteriul de optimizare cere să se producă o cantitate cât mai mare de energie cu combustibilul disponibil.

Rezolvare

Se notează cu x_1 puterea produsă de primul grup şi cu x_2 puterea produsă de cel de al doilea grup.

Formularea matematică a aceste probleme este următoarea:

$$\max\left(24x_1 + 24x_2\right)$$
$$\begin{cases} 0{,}95 \cdot 24 \cdot 0{,}4x_1 + 0{,}92 \cdot 24 \cdot 0{,}3x_2 \leq 2200 \\ 0{,}05 \cdot 24 \cdot 0{,}4x_1 + 0{,}08 \cdot 24 \cdot 0{,}3x_2 \leq 150 \\ x_1 \leq 100 \\ x_2 \leq 200 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0$$

După cum se poate observa este vorba de o problemă de optimizare sub formă canonică. Pentru a o transforma sub formă standard se introduc variabilele ecart suplimentare x_3, x_4, x_5, x_6 care transformă inegalitățile în egalități, problema modificată fiind:

$$\max\left(24 \cdot x_1 + 24 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_5\right)$$
$$\begin{cases} 9{,}12x_1 + 6{,}624x_2 + x_3 = 2200 \\ 0{,}48x_1 + 0{,}576x_2 + x_4 = 150 \\ x_1 + x_5 = 100 \\ x_2 + x_6 = 200 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0; \quad x_3 \geq 0; \quad x_4 \geq 0; \quad x_5 \geq 0; \quad x_6 \geq 0$$

Elementele care permit punerea acestei probleme sub formă standard matriceală sunt:

$$c = \begin{bmatrix} 24 & 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$
$$A = \begin{bmatrix} 9{,}12 & 6{,}624 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}48 & 0{,}576 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$b = \begin{bmatrix} 2200 & 150 & 100 & 200 \end{bmatrix}^T$$

O împărțire foarte simplă a matricei A care permite obținerea soluției inițiale de bază şi inițializarea algoritmului este:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I; \quad R = G = \begin{bmatrix} 9{,}12 & 6{,}624 \\ 0{,}48 & 0{,}576 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$c^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T; \quad c^R = \begin{bmatrix} 24 & 24 \end{bmatrix}^T$$

care corespunde soluției inițiale:

$$x_1^{(0)} = 0; x_2^{(0)} = 0; x_3^{(0)} = 2200; x_4^{(0)} = 150; x_5^{(0)} = 100; x_5^{(0)} = 200$$

cu o valoare nulă a funcției obiectiv.

În continuare se completează tabelul simplex. Pentru aceasta se porneşte de la soluția inițială de bază pentru care se determină valorile coeficienților Z_j făcând produsul scalar dintre coloana c şi coloana a_j.

De exemplu:

$$Z_1 = c^T a_1 = 0 \cdot 9{,}12 + 0 \cdot 0{,}48 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

Aceşti coeficienți se utilizează pentru determinarea diferențelor Z_j-c_j pentru coloanele a_j care nu fac parte din bază.

Deoarece ambele diferențe care interesează la acest caz (Z_1-c_1 şi Z_2-c_2) sunt negative, rezultă că soluția nu este optimă. Din faptul că atât vectorul a_1 cât şi vectorul a_2 are componente pozitive, rezultă că nu se poate trage concluzia că nu există soluție optimală.

Diferențele Z_j-c_j negative fiind, în acest caz, egale, se alege arbitrar a_1 ca fiind noul vector care intră în bază.

Pentru determinarea vectorului care iese din bază se calculează:

$$\min_{k=m+1,n}\left\{\frac{\overline{x}_k^{B}}{g_{kl}}\middle| g_{kl}>0\right\}=\min\left\{\frac{2200}{9,12},\frac{150}{0,48},\frac{100}{1}\right\}=\frac{100}{1}$$

deci vectorul care iese din bază va fi a_5.

Soluția optimă pentru această problemă este următoarea:

$$x_3=115;\, x_2=177,08;\, x_1=100;\, x_3=115;\, x_6=22,91;\, x_4=x_5=0$$

După cum se poate observa, pentru a obține cantitatea maximă de energie grupurile trebuie încărcate cu puterile de 100 MW şi respectiv 177 MW, deci trebuie încărcat cu puterea nominală grupul care are consumul specific maxim, contrar a ceea ce era de aşteptat.

Problema duală corespunzătoare problemei date va fi:

$$\min\left(2200y_1+150y_2+100y_3+200y_4\right)$$
$$\begin{cases}0,95\cdot 24\cdot 0,4y_1+0,05\cdot 24\cdot 0,4y_2+y_3 \geq 24\\ 0,92\cdot 24\cdot 0,3y_1+0,08\cdot 24\cdot 0,3y_2+ y_4\geq 24\end{cases}$$
$$y_1\geq 0;\quad y_2\geq 0;\quad y_3\geq 0;\quad y_4\geq 0$$

a cărei soluție poate fi găsită pe linia ultimului tabel simplex, pe linia Z_j în coloanele $a_3 \div a_6$ care au alcătuit prima bază: y_1=0; y_2=41,66; y_3=4; y_4=0.

		24	24	0	0	0	0		
C	Baza	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b	
0	a_3	9,12	6,624	1	0	0	0	2200	$\min\left\{\frac{2200}{9,12},\frac{150}{0,48},\frac{100}{1}\right\}=\frac{100}{1}$
0	a_4	0,48	0,576	0	1	0	0	150	
0	a_5	$\boxed{1}$	0	0	0	1	0	100	
0	a_6	0	1	0	0	0	1	200	
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	
Z_j-c_j		-24	-24	0	0	0	0		
0	a_3	0	6,624	1	0	-9,12	0	1288	$\min\left\{\frac{1288}{6,624},\frac{102}{0,576},\frac{200}{1}\right\}=\frac{102}{0,576}$
0	a_4	0	$\boxed{0,576}$	0	1	-0,48	0	102	
24	a_1	1	0	0	0	1	0	100	
0	a_6	0	1	0	0	0	1	200	
Z_j		24	0	0	0	24	0	2400	
Z_j-c_j		0	-24	0	0	0	0		
0	a_3	0	0	1	-11,5	-3,6	0	115	
24	a_2	0	1	0	1,736	-0,833	0	177,08	
24	a_1	1	0	0	0	1	0	100	
0	a_6	0	0	0	-1,736	0,833	0	22,91	
Z_j		24	24	0	41,66	4	0	6649,9	
Z_j-c_j		0	0	0	41,66	4	0		